Fonctions elliptiques

Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles mais exploitent toutes les trois les fonctions présentées dans la partie I.

Partie I – Constructions des fonctions elliptiques

k désigne un réel de l'intervalle $[0,1[$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale : $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$.

On définit une fonction $U:[-1,1]\to\mathbb{R}$ en posant $U(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$.

Cette fonction U est appelée fonction elliptique de 1ère espèce et de module k .

2 Etablir que pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], U(\sin(x))=\int_0^x \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\tau)}}$

3. On introduit désormais la fonction réelle $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par la relation $u(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}$.

3.a Etudier la parité de la fonction u .

3.b Justifier que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de $u'(x)$.

En déduire que u est strictement croissante.

3.c Etablir : $\lim_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$.

3.d Conclure que u réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

4. On note $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application réciproque de la fonction u .
A est appelée fonction d'amplitude.

4.a Préciser le sens de variation et la parité de A

4.b Justifier que A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer A' .

4.c Observer que A'' vérifie : $A''+k^2\sin A\cos A=0$.

5. Montrer que la quantité $u(x+\pi)-u(x)$ est constante quel que soit $x\in\mathbb{R}$.

Exprimer cette constante qu'on notera K en fonction de $u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ puis de $T=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$.

6. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, on note $x=A(y)$ et on définit les fonctions Sn, Cn et Dn par :

$Sn(y)=\sin(x)$, $Cn(y)=\cos(x)$ et $Dn(y)=\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}$.

Ces trois fonctions sont appelées fonctions de Jacobi.

6.a Etudier la parité de ces 3 fonctions et préciser leur régularité.

6.b Montrer qu'elles sont périodiques et donner leur période en fonction de T .

6.c Calculer $Sn(T)$, $Cn(T)$ et $Dn(T)$.

6.d Exprimer les dérivées Sn' , Cn' et Dn' en fonction de Sn, Cn et Dn .

6.e Justifier que Sn est solution sur $\mathbb{R}$ du problème différentiel : $\begin{cases} y''+(1+k^2)y-2k^2y^3=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$.

7. Préciser les fonctions Sn, Cn et Dn lorsque $k=0$ ainsi que la valeur de T .

Partie II – Formule d'addition sur les fonctions de Jacobi

1. Soit l'application $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ suivante : $(a,b)\mapsto\left(\frac{1}{2}(a+b),\frac{1}{2}(a-b)\right)$.

Montrer que ϕ est bijective et exprimer son application réciproque ϕ^{-1} .

2. Pour toute application $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$, on note g l'application composée $f\circ\phi$.

2.a Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si g l'est également.

2.b Exprimer dans ce cas les dérivées partielles premières de g notées : $\dfrac{\partial g}{\partial a}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial b}$ en fonction de celles de f notées : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2.c En déduire une description de l'ensemble E formé des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3. Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=f(y,x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

Montrer qu'il existe $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=\alpha(x+y)$.

4. Démontrer :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, Sn(x+y)=\frac{Sn(x)Cn(y)Dn(y)+Sn(y)Cn(x)Dn(x)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}.$$

On établit de même, mais on ne le demande pas ici, les formules :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, Cn(x+y)=\frac{Cn(x)Cn(y)-Sn(x)Dn(x)Sn(y)Dn(y)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)} \text{ et}$$

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, Dn(x+y)=\frac{Dn(x)Dn(y)-k^2Sn(x)Cn(x)Sn(y)Cn(y)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}.$$

Partie III – Rectification de la lemniscate de Bernouilli

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée usuelle et on note $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ son repère canonique.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\vec{u}(\theta)=\cos\theta\cdot\vec{i}+\sin\theta\cdot\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta)=-\sin\theta\cdot\vec{i}+\cos\theta\cdot\vec{j}$.

On appelle lemniscate de Bernouilli, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho=\sqrt{2\cos2\theta}$ c'est à dire la courbe de point courant $M(\theta)$ déterminé par $\overrightarrow{OM(\theta)}=\rho(\theta)\cdot\vec{u}_\theta$ avec $\rho(\theta)=\sqrt{2\cos2\theta}$.

1.a Préciser le domaine de définition et la périodicité de l'application $\theta\mapsto\rho(\theta)$.
Justifier que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport au point O.

1.b Justifier que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox)

1.c Dresser le tableau de variation de $\theta\mapsto\rho(\theta)$ sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

1.d Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ en prenant une unité égale à 4 cm.

On prendra soin de préciser les tangentes aux points de paramètres $\theta\in\left\{0,\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

1.e On oriente la courbe $\mathcal{C}$ dans le sens des θ croissants.
Préciser, sur la figure qui précède le sens de parcours des θ croissants sur les deux boucles figurées.

On s'intéresse ici à la portion de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$.

2. On désigne par s l'abscisse curviligne d'origine $M(0)$ le long de la portion de $\mathcal{C}$ étudiée.
On note $\vec{T}(\theta)$ le premier vecteur du repère de Frénêt au point $M(\theta)$.

2.a. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$.

2.b Déterminer une fonction numérique $\theta\mapsto\alpha(\theta)$ dérivable telle que : $\forall\theta\in\mathbb{R}, \alpha(\theta)=(\vec{i},\vec{T}(\theta))\,[2\pi]$.

2.c Exprimer la valeur du rayon de courbure $R(\theta)$ en tout point $M(\theta)$ de $\mathcal{C}$.

3. En observant $s(\theta)=\int_0^\theta \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-2\sin^2\alpha}}$ puis en s'appuyant sur un changement de variable adéquate, exprimer $s(\theta)$ à l'aide de la fonction U pour un paramètre $k\in[0,1[$ à préciser.

Partie IV – Période d'un pendule simple

On se donne $\omega>0$ et $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1. (Cas des petites oscillations)
On considère le problème différentiel : $\begin{cases} y''+\omega^2\cdot y=0 \\ y(0)=\alpha, y'(0)=0 \end{cases}$ (1)

1.a Montrer que ce problème possède une solution unique que l'on exprimera.

1.b Déterminer la période T_0 de cette solution.

2. (Etude générale)
On considère désormais le problème différentiel suivant : $\begin{cases} y''+\omega^2\sin y=0 \\ y(0)=\alpha, y'(0)=0 \end{cases}$ (2)

On admet que celui-ci possède une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k\in]0,1[$ et $t_0\in\mathbb{R}$, on considère la fonction f définie par : $f(t)=-2\arcsin(k\cdot Sn(\omega(t-t_0)))$.

2.a Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier que f y est indéfiniment dérivable.

2.b Observer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+\omega^2\sin y=0$.

2.c Montrer qu'il existe k et t_0 à déterminer tels que f soit solution du problème (2).

2.d Observer que f est périodique et préciser sa période T_1 en fonction de ω et T.

2.e Montrer que T_1 est une fonction croissante de α.

3. Montrer que le rapport $\frac{T_1}{T_0}$ ne dépend que de α (et non de ω).